



**Unidad Algebra II.4: Funciones polinómicas y racionales**  
**Matemáticas**  
**5 semanas de instrucción**

**ETAPA 1 – (Resultados esperados)**

**Resumen de la Unidad:**

En esta unidad, el estudiante resolverá operaciones básicas con monomios, binomios, y polinomios al aplicarlas para analizar el comportamiento gráfico También explorará las funciones radicales e identificara raíces extrañas. El estudiante resolverá ecuaciones racionales simples y radicales en una variable. Explorará el teorema del residuo. Interpretará expresiones que representan una cantidad, según su contexto e interpretará los componentes de una expresión.

**Preguntas Esenciales (PE) y Comprensión Duradera (CD)**

**PE1** ¿Cómo encuentro todos los factores de una expresión polinómica?

**CD1** Encontrar factores de polinomios indicaría cuales son las soluciones o puntos críticos.

**PE2** ¿Por qué es necesario entender el comportamiento gráfico de las funciones racionales cerca de  $x$  en donde la función es indefinida?

**CD2** Las gráficas de las funciones racionales tienen asíntotas verticales y/o horizontales.

**PE3** ¿De qué manera nos ayudan las gráficas y funciones a entender e interpretar los problemas de la vida diaria?

**CD3** Una situación de la vida diaria puede ser analizada cuando son representadas como funciones.

**Objetivos de Transferencia (T) y Adquisición (A)**

**T1.** Al final de esta unidad el estudiante podrá usar ecuaciones y expresiones polinómicas y racionales para modelar y resolver problemas del vida diaria. Podrá ser capaz de usar su aprendizaje independientemente para determinar qué tan “exacto” puede verse la gráfica de una función polinómica.

*El estudiante adquiere destrezas para...*

**A1.** Explica por qué la suma, la resta o el producto de dos números racionales es racional; y por qué la suma o el producto de un número racional y un número irracional es irracional.

**A2.** Compara las propiedades de dos funciones, cada una representada de diferente manera (algebraicamente, gráficamente, en una tabla de valores o descrita verbalmente).

**A3.** Conoce y aplica el teorema del residuo.

**A4.** Identifica los ceros en polinomios cuando las factorizaciones son razonables, y usa los ceros para construir una gráfica aproximada de la función definida por el polinomio.

**A5.** Resuelve ecuaciones racionales y radicales simples de una variable y da ejemplos de cómo pueden resultar en soluciones extrañas.

**A6.** Escribe una función que describa una relación entre dos cantidades. Determina una expresión explícita, un proceso recursivo, o pasos para un cálculo a partir de un contexto.

**A7.** Modelar situaciones al elaborar ecuaciones e inecuaciones basadas en funciones racionales.

**Los Estándares de Puerto Rico (PRCS)**

**Estándar de Numeración y Operación**



**Unidad Algebra II.4: Funciones polinómicas y racionales**  
**Matemáticas**  
**5 semanas de instrucción**

<b>ES.N.1.1</b>	Explica por qué la suma, la resta o el producto de dos números racionales es racional; y por qué la suma o el producto de un número racional y un número irracional es irracional.
<b>(+) ES.N.4.3</b>	Conoce el Teorema Fundamental del Álgebra; demuestra que se cumple para polinomios cuadráticos.
<b>Estándar de Álgebra</b>	
<b>ES.A.9.1</b>	Interpreta expresiones que representan una cantidad, según su contexto. Interpreta los componentes de una expresión, por ejemplo, sus términos, factores y coeficientes. Interpreta expresiones complicadas al señalar una o más de sus partes como una entidad única (ejemplo: Interpretar $P(1+r)^n$ como el producto de P y un factor que no depende de P).
<b>(+) ES.A.11.1</b>	Reconoce que los polinomios forman un sistema análogo a los enteros, es decir, son cerrados para las operaciones de suma, resta y multiplicación y utiliza esta información para realizar las operaciones indicadas.
<b>ES.A.12.1</b>	Conoce y aplica el teorema del residuo: para un polinomio $p(x)$ y un número $a$ , el residuo de división por $x - a$ es $p(a)$ , por tanto $p(a) = 0$ sí, y solo sí, $(x - a)$ es un factor de $p(x)$ .
<b>ES.A.12.2</b>	Identifica los ceros en polinomios cuando las factorizaciones son razonables, y usa los ceros para construir una gráfica aproximada de la función definida por el polinomio.
<b>ES.A.13.3</b>	Reescribe expresiones racionales simples de diferentes formas; escribe $\frac{a(x)}{b(x)}$ de la forma $q(x) + \frac{r(x)}{b(x)}$ , en la que $a(x)$ , $b(x)$ , $q(x)$ y $r(x)$ son polinomios, con el grado de $r(x)$ menor que el grado de $b(x)$ , $b(x) \neq 0$ ; usa inspección, división larga, división sintética o, en ejemplos más complejos, un sistema algebraico computacional.
<b>ES.A.13.4</b>	Reconoce que las expresiones racionales forman un sistema análogo a los números racionales, que es cerrado para la suma, la resta, la multiplicación y la división por una expresión racional diferente de cero y utiliza esta información para realizar las operaciones indicadas.
<b>ES.A.15.1</b>	Resuelve ecuaciones racionales y radicales simples de una variable y da ejemplos de cómo pueden resultar en soluciones extrañas.
<b>ES.A.18.2</b>	Explica por qué las coordenadas $x$ de los puntos donde las gráficas de las ecuaciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$ se intersecan, son las soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$ ; halla las soluciones aproximadas, (ejemplo: utiliza la tecnología para graficar las funciones y prepara tablas de valores o hallando aproximaciones sucesivas). Incluye casos en los que $f(x)$ y/o $g(x)$ sean funciones lineales, polinómicas, racionales, valor absoluto, exponenciales y logarítmicas.



**Unidad Algebra II.4: Funciones polinómicas y racionales**  
**Matemáticas**  
**5 semanas de instrucción**

<b>Estándar de Funciones</b>	
<b>ES.F.22.2</b>	<p>Compara las propiedades de dos funciones, cada una representada de diferente manera: algebraicamente, gráficamente, en una tabla numérica o descrita verbalmente (ejemplo: Dada una gráfica para una función cuadrática y una expresión algebraica para otra, decide cuál tiene el valor máximo mayor).</p> <p>Reconoce y describe la continuidad, las asíntotas, la simetría (funciones pares e impares) y relaciona estos conceptos con la gráfica de la función.</p>
<b>ES.F.23.1</b>	<p>Interpreta las características básicas de las gráficas y las tablas de una función que representa dos cantidades en términos de esas cantidades, y bosqueja gráficas que muestren las características a partir de una descripción verbal de la relación. Entre las características se incluyen: interceptos, intervalos donde la función es creciente, decreciente, positiva o negativa, máximos y mínimos relativos, simetrías, comportamiento en los extremos, y periodicidad.</p>
<b>ES.F.24.3</b>	<p>Grafica funciones expresadas simbólicamente y muestra las características claves de la gráfica, en forma manual en casos sencillos y con tecnología en casos más complejos.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Grafica funciones polinómicas e identifica los ceros cuando las factorizaciones son razonables, y muestra su comportamiento en los extremos.</li> <li>• Grafica funciones racionales e identifica los ceros y las asíntotas cuando las factorizaciones son razonables, y muestra su comportamiento en los extremos.</li> </ul>
<b>ES.F.25.1</b>	<p>Escribe una función que describa una relación entre dos cantidades. Determina una expresión explícita, un proceso recursivo, o pasos para un cálculo a partir de un contexto. Utiliza operaciones aritméticas para combinar diferentes tipos de funciones (ejemplo: Construir una función que modele la temperatura de un cuerpo que se va enfriando, y agrega una función constante a un exponente decreciente y relaciona estas funciones con el modelo).</p>
<b>Procesos y Competencias Fundamentales de Matemáticas (PM)</b>	
<b>PM1</b>	Comprende problemas a medida que desarrolla su capacidad para resolverlos con confianza.
<b>PM2</b>	Razona de manera concreta y semiconcreta, hasta alcanzar la abstracción cuantitativa.
<b>PM3</b>	Construye y defiende argumentos viables, así como comprende y critica los argumentos y el razonamiento de otros.
<b>PM4</b>	Utiliza las matemáticas para resolver problemas cotidianos.
<b>PM5</b>	Utiliza las herramientas apropiadas y necesarias (incluye la tecnología) para resolver problemas en diferentes contextos.
<b>PM6</b>	Es preciso en su propio razonamiento y en discusiones con otros.
<b>PM7</b>	Discierne y usa patrones o estructuras.
<b>PM8</b>	Identifica y expresa regularidad en los razonamientos repetidos.



## Unidad Algebra II.4: Funciones polinómicas y racionales

### Matemáticas

### 5 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de contenido <i>(El estudiante comprenderá...)</i>	Dominio y Destrezas <i>(El estudiante podrá...)</i>	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y ejemplos para planes de la lección
<p><b>PRCS:</b> (+)ES.N.4.3 ES.A.18.2 ES.A.9.1 (+)ES.A.11.1 ES.A.12.1 ES.A.12.2 ES.F.22.2 ES.F.23.1 ES.F.25.1</p> <p><b>PM:</b> PM1 PM2 PM3 PM4 PM5 PM6 PM7 PM8</p> <p><b>PE/CD:</b> PE1/CD1 PE3/CD3</p> <p><b>T/A:</b> T1/A3/A4/A6</p>	<p><b>Polinomios</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Que los polinomios forman un sistema análogo a los enteros, es decir, son cerrados para las operaciones de suma, resta y multiplicación y utiliza esta información para realizar las operaciones indicadas.</li> <li>El Teorema del residuo.</li> <li>El Teorema del Factor.</li> <li>El Teorema Fundamental del Álgebra.</li> </ul>	<p><b>Sentido numérico</b> <b>Representación</b> <b>Modelos</b> <b>Matemáticos</b> <b>Patrones, relaciones y funciones</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Interpretar los componentes de un polinomio: términos y su clasificación de acuerdo a número de éstos, coeficientes, factores, grado y su clasificación de acuerdo a éste.</li> <li>Sumar, restar, multiplicar expresiones polinómicas.</li> <li>Analizar y describir gráficas de funciones polinómicas</li> </ul>	<p><i>Para obtener descripciones completas, favor de ver la sección "Tareas de desempeño" al final de este mapa.</i></p> <p><b>¡Nosotros somos Polinomios!</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Los estudiantes crearán un polinomio con soluciones que son 3, -1, 0, 5. Pida a cada estudiante que prueben que 3, -1, 0 y 5 son soluciones a los polinomios creados al demostrarlo con la división larga polinomial de cada factor.</li> </ul> <p><u>Rúbrica:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Experto: El Polinomio creado es 100% correcto y todas las explicaciones escritas de la división polinomial larga son correctas.</li> <li>Competente: El Polinomio creado es</li> </ul>	<p><b>Ejemplos de preguntas de examen/prueba corta</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>¿Cuáles son las raíces de <math>g(x) = x^2 - \frac{144}{169}</math> ?</li> </ul> <p><b>Diario de matemáticas (preguntas de ejemplo)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Describe por escrito cómo determinas la forma de la gráfica a partir de la ecuación antes de generar la gráfica.</li> <li>Una empresa usa dos camiones de distintos tamaños para entregar arena. El primer camión puede transportar <math>x</math> yardas cúbicas, y el segundo <math>x</math> yardas cúbicas. El primer camión hace <math>S</math> viajes a un lugar de trabajo, mientras el segundo hace <math>T</math> viajes. Explica el significado de las siguientes expresiones. <math>S + T</math>, <math>x + y</math>, <math>xS + yT</math></li> </ul> <p><b>Papelito de entrada (ejemplos rápidos)</b> Use la información para orientar la clase del día.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Explica una idea que recuerdes de la clase anterior.</li> <li>Nombra una idea que no comprendiste de la tarea para hoy.</li> <li>Explica que fue difícil (o fácil) de la tarea asignada para hoy.</li> </ul>	<p><i>Para obtener descripciones completas, ver las secciones "Actividades de aprendizaje" y "Ejemplos para planes de la lección" al final de este mapa.</i></p> <p><b>Compara las propiedades de dos funciones</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Después que los estudiantes han aprendido las propiedades de las funciones, póngalos en parejas y entregue a cada par dos funciones. Asegúrese que las funciones de cada grupo sean distintas. Pídales que comparen las propiedades de ambas funciones en una presentación visual (grafica, tabla, etc.). Cuando todos hayan completado la tarea pida a las parejas que presenten sus descubrimientos a la clase para una crítica de pulgares arriba o pulgares abajo.</li> </ul> <p><b>Funciones del Mundo Real</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Entregue a los estudiantes ejemplos de funciones de situaciones del mundo real. Empiece con el siguiente ejemplo:</li> <li><math>T(y)</math> es la temperatura de la atmósfera en función de la altura, y <math>h(t)</math> es la altitud de un globo meteorológico en función del tiempo, entonces <math>T(h(t))</math> es la temperatura en el lugar donde se encuentra el globo en función del tiempo. Entregue a los estudiantes otros ejemplos. Una fuente de estos ejemplos es el</li> </ul>



**Unidad Algebra II.4: Funciones polinómicas y racionales**  
**Matemáticas**  
**5 semanas de instrucción**

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de contenido (El estudiante comprenderá...)	Dominio y Destrezas (El estudiante podrá...)	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y ejemplos para planes de la lección
		examinando sus dominio, alcance, interceptos en los ejes, puntos máximos o mínimos, simetría, intervalos de cambio (decreciente, creciente o constante ). <ul style="list-style-type: none"> <li>Identificar los ceros reales y/o complejos en polinomios cuando las factorizaciones son razonables, y usar los ceros para construir una gráfica aproximada de la función definida por el polinomio.</li> <li>Aplicar el Teorema del</li> </ul>	100% correcto y 3 o 4 de las explicaciones de la división polinomial larga son correctas. <ul style="list-style-type: none"> <li>Básico: El Polinomio creado puede o no ser correcto y la división polinomial larga carece de exactitud.</li> </ul> <p><b>Un Amigo Enfermo</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Después de estudiar el teorema del residuo los estudiantes estarán listos para esta tarea.</li> <li>Tu amigo ha perdido la clase del Teorema del Residuo. Él aún está enfermo. En parejas, creen una presentación para él, explicando el Teorema del Residuo. Debe incluir: una definición del teorema en tus propias palabras, por lo menos 5 ejemplos y 2 problemas prácticos para tu amigo.</li> </ul>	<p><b>Papelito de salida (ejemplos rápidos)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>En la clase de hoy aprendí _____.</li> <li>Hoy estuve confundido con _____.</li> </ul>	currículum de ciencias de los estudiantes para usar formulas con las que ellos están familiarizados. Pídales que trabajen en parejas para que busquen un ejemplo en el internet o en un libro de ciencias. <p><b>El Teorema Fundamental de Álgebra</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>En esta actividad los estudiantes aprenderán el Teorema Fundamental de Álgebra. Ellos iniciarán la lección encontrando ceros (raíces) de la función <math>f(x) = x^2 - 9</math>. (ver abajo)</li> </ul> <p><b>Teorema del Residuo</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>En esta lección usted ayudará a los estudiantes a descubrir los factores en una expresión polinomial. Distribuya la hoja de trabajo y ayude a los estudiantes mientras la completan (ver anejo: "AL.4 Actividad de Aprendizaje - Teorema del Residuo")</li> <li>Mientras ellos completan cada parte, resúmala con una discusión de toda la clase de hacia dónde esto nos llevará.</li> <li>Preste mucha atención a la Parte 2 I ya que es un concepto importante.</li> </ul> <p><b>Pareo de gráficas y ecuaciones</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Haz un conjunto de tarjetas para grupos de 3 a 4 estudiantes. El conjunto incluirá tarjetas con gráficas y tarjetas con problemas de monomios y polinomios de operaciones básicas. Los</li> </ul>



**Unidad Algebra II.4: Funciones polinómicas y racionales**  
**Matemáticas**  
**5 semanas de instrucción**

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de contenido (El estudiante comprenderá...)	Dominio y Destrezas (El estudiante podrá...)	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y ejemplos para planes de la lección
		<p>Residuo: para un polinomio <math>p(x)</math> y un número <math>a</math>, el residuo de división por <math>x - a</math> es <math>p(a)</math>, por tanto <math>p(a) = 0</math> sí, y solo sí, <math>(x - a)</math> es un <b>factor</b> de <math>p(x)</math>; (Teorema del Factor).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Probar que <math>c</math> es o no es un cero de <math>f(x)</math> usando la división sintética.</li> <li>• Demostrar que <math>(x-c)</math> no es un factor de <math>f(x)</math>.</li> <li>• Utilizar la tecnología para graficar funciones polinómicas preparando tablas de valores o hallando aproximaciones sucesivas).</li> </ul>	<p>Asegúrate de tener las respuestas de los problemas que le has asignado.</p> <p><u>Rúbrica:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Experto: La presentación cumple todos los criterios y es 100% exacta.</li> <li>• Competente: La presentación cumple con el criterio y al menos es 80% exacta.</li> <li>• Básico: La presentación puede o no cumplir con los criterios. El trabajo es menos de 80% exacto.</li> </ul>		<p>estudiantes deberán parear las gráficas con los problemas e identificar cualquier gráfica o problema que no tenga pareja. Para ganar, los estudiantes tendrán que parear de forma correcta y proveer prueba matemática para sus respuestas.</p> <p><i>Ejemplo 1 para planes de la lección: ¿Quién soy?</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• En esta lección, los estudiantes escribirán la ecuación de un polinomio en forma estándar dadas sus raíces y el comportamiento final de la función. Los estudiantes determinarán los extremos locales usando una herramienta para gráficas, graficarán el polinomio usando la herramienta y papel cuadriculado y hallarán las raíces complejas de un polinomio de orden mayor en forma estándar. (ver abajo)</li> </ul>

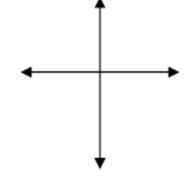
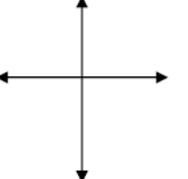


**Unidad Algebra II.4: Funciones polinómicas y racionales**  
**Matemáticas**  
**5 semanas de instrucción**

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de contenido <i>(El estudiante comprenderá...)</i>	Dominio y Destrezas <i>(El estudiante podrá...)</i>	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y ejemplos para planes de la lección
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Analizar una situación de la vida diaria cuando es representada por una función polinómica.</li> </ul>			
<b>Vocabulario de Contenido</b>					
<ul style="list-style-type: none"> <li>Polinomios</li> <li>Binomios</li> <li>Residuo</li> <li>Factor</li> <li>Identidad Polinomial</li> <li>Teorema del Residuo</li> <li>Teorema del Factor</li> <li>Teorema Fundamental del Álgebra</li> </ul>					



**Unidad Algebra II.4: Funciones polinómicas y racionales**  
**Matemáticas**  
**5 semanas de instrucción**

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de Contenido (El estudiante comprenderá...)	Dominio y Destrezas (El estudiante podrá...)	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y ejemplos para planes de la lección
<p><b>PRCS:</b> ES.N.1.1 ES.A.9.1 ES.A.13.4 ES.A.15.1</p> <p><b>PM:</b> PM1 PM2 PM3 PM4 PM5 PM6 PM7 PM8</p> <p><b>PE/CD:</b> PE2/CD2 PE3/CD3</p> <p><b>T/A:</b> T1/A1/A2/A5/ A6/A7</p>	<p><b>Expresiones y funciones racionales</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>De qué forma la definición del significado de los exponentes racionales sigue desde la extensión de las propiedades del exponente del entero a esos valores, permitiendo una notación de radicales en términos de exponentes racionales.</li> <li>Por qué la suma, la resta o el producto de dos números racionales es racional; y por qué la suma o el producto de un número racional y un número irracional es irracional.</li> <li>El concepto del comportamiento asintótico</li> </ul>	<p><b>Operaciones y Estimados Modelos matemáticos Representación</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Simplificar expresiones racionales y/o radicales .</li> <li>Sumar, restar, multiplicar, evaluar y simplificar expresiones racionales que contienen denominadores lineales y cuadráticos.</li> <li>Racionalizar expresiones con números radicales.</li> <li>Describir la gráfica de las funciones racionales, sus restricciones en</li> </ul>	<p><i>Para obtener descripciones completas, favor de ver la sección “Tareas de desempeño” al final de este mapa.</i></p> <p><b>Peso y Funciones Racionales</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>El efecto de la gravedad de la Tierra disminuye mientras la distancia a la Tierra se incrementa. El peso de una persona a dada altura sobre el nivel del mar es descrita por la función <b>W(h) = rw / h + r</b> donde r es el radio de la Tierra (3,963 miles), h es la altura sobre el nivel del mar, y w es el peso de la persona al nivel del mar. Muestre todo el trabajo y explique sus respuestas en el contexto.</li> </ul> <p>1. ¿Cuánto más liviana que tú es una persona en un</p>	<p><b>Ejemplos de preguntas de examen/prueba corta</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Ver anejo: “AL.4 Otra evidencia — Ejemplos de preguntas de examen”</li> </ul> <p>1. Dibuja la gráfica de las siguientes funciones racionales:</p> <p>a.</p> $f(x) = \frac{3}{x-3}$  <p>b.</p> $f(x) = \frac{-3}{(x-3)^2}$  <p>2. ¿Cuál expresión es equivalente a <math>-3x(x-4) - 2x(x+3)</math>?</p> <p>a) <math>-x^2 - 1</math> b) <math>-x^2 + 18x</math> c) <math>-5x^2 - 6x</math> d) <math>-5x^2 + 6x</math></p> <p>3. ¿Cuál es el producto de <math>(c+8)</math> y <math>(c-5)</math>?</p>	<p><i>Para obtener descripciones completas, ver las secciones “Actividades de aprendizaje” y “Ejemplos para planes de la lección” al final de este mapa.</i></p> <p><b>¿Racional o irracional?</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Puede iniciar enseñando por qué la suma, diferencia y producto de los números racionales es racional y por qué la suma o producto de un racional e irracional es irracional. (ver abajo)</li> </ul> <p><b>Aplicación de funciones racionales.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Este es un problema de introducción que preparará a los estudiantes a abordar las aplicaciones de las funciones racionales. Dé tiempo a los estudiantes para que piensen en cómo se usan las funciones racionales para hacer modelos. Más adelante incorpore sus ideas para revelar una solución usando varios métodos. Problema: Vamos a poner un corral adyacente a un río. No hace falta poner verja a la orilla del río. El área cercada debe medir 800 yardas cuadradas. Halla las dimensiones de x y de y que hacen falta para usar el mínimo de valla.</li> </ul> <p>(Fuente: <a href="http://www.curriculumframer.com">www.curriculumframer.com</a>)</p> <p><b>Ejemplo 2 para planes de la lección: ¿Cuán simple es tu expresión racional?</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Los estudiantes aprenden a simplificar las</li> </ul>



**Unidad Algebra II.4: Funciones polinómicas y racionales**  
**Matemáticas**  
**5 semanas de instrucción**

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de Contenido (El estudiante comprenderá...)	Dominio y Destrezas (El estudiante podrá...)	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y ejemplos para planes de la lección
		<p>el dominio y el campo de valores, y examinar su conducta asintótica.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Graficar funciones racionales e identificar los ceros y las asíntotas cuando las factorizaciones son razonables, y mostrar su comportamiento en los extremos.</li> <li>Utilizar la tecnología para graficar funciones racionales.</li> <li>Modelar situaciones elaborando ecuaciones basadas en</li> </ul>	<p>pueblo que tiene una altitud de 2,000 pies, mientras estas al nivel del mar? Redondea tu respuesta a la milésima más cercana de una onza.</p> <p>2. Una montaña que tiene una elevación de 14,409 pies, ¿Cuánto más liviana sería la mochila cuando se llegue a la cima? Redondee su respuesta a la milésima más cercana de una onza.</p> <p>3. ¿Cuál deberá ser la elevación de una persona (a la milla más cercana) para que su mochila pese 35 libras?</p> <p>(Fuente: <a href="http://www.lrhdsd.org">http://www.lrhdsd.org</a>)</p>	<p>a) <math>c^2 + 3c - 40</math> b) <math>c^2 - 3c - 40</math> c) <math>c^2 + 13c - 40</math> d) <math>c^2 - 40</math></p> <p>4. La suma de <math>\sqrt{18}</math> y <math>\sqrt{72}</math> es 1) <math>\sqrt{90}</math> 2) <math>9\sqrt{2}</math> 3) <math>3\sqrt{10}</math> 4) <math>6\sqrt{3}</math></p> <p>5. ¿Cuál es el conjunto de solución de <math>\frac{x+2}{x-2} = \frac{-3}{x}</math>?</p> <p><b>Diario de matemáticas (preguntas de ejemplo)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Describe en tus palabras cómo determinarías la forma de la gráfica a partir de la ecuación antes de dibujar la gráfica como tal.</li> </ul> <p><b>Papelito de entrada (ejemplos rápidos)</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Describe e ilustra cómo resolver <math>(m-2)^2</math>.</li> <li>Expresa <math>\frac{16\sqrt{21}}{2\sqrt{7}} - 5\sqrt{12}</math> en la forma radical más simple.</li> </ol> <p><b>Papelito de salida (ejemplos rápidos)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>En la clase de hoy aprendí _____.</li> <li>Hoy estuve confundido con _____.</li> </ul>	<p>expresiones racionales usando notas y práctica de guía. Crea notas de guía a partir de las páginas de ejemplos, tacha las frases y pasos clave y entrégaselo a los estudiantes para que ellos completen lo que falta durante la discusión en clase. A continuación, usando el modelo "Me toca, te toca, nos toca", completa la hoja de actividades para los estudiantes usando las notas de guía como recurso. (ver anejo: "AL.4-Actividad de Aprendizaje- Cuán simple es tu expresión racional")</p> <p>(Fuente: <a href="http://www.beaconlearningcenter.com/Lessons/1512.htm">http://www.beaconlearningcenter.com/Lessons/1512.htm</a>)</p>



**Unidad Algebra II.4: Funciones polinómicas y racionales**  
**Matemáticas**  
**5 semanas de instrucción**

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de Contenido <i>(El estudiante comprenderá...)</i>	Dominio y Destrezas <i>(El estudiante podrá...)</i>	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y ejemplos para planes de la lección
		funciones racionales. <ul style="list-style-type: none"> <li>• Utilizar las propiedades de los radicales para resolver ecuaciones racionales y radicales simples de una variable e identifica raíces extrañas cuando estas ocurran; interpretar las soluciones en términos del contexto.</li> </ul>			
<b>Vocabulario de Contenido</b>					
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Función racional</li> <li>• Expresión Racional</li> <li>• Asíntota</li> <li>• Comportamiento asintótico</li> <li>• Soluciones extrañas</li> </ul>					

**ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)**



**Unidad Algebra II.4: Funciones polinómicas y racionales**  
**Matemáticas**  
**5 semanas de instrucción**

**Conexiones a la literatura sugeridas**

- **Martin Plimmer**
  - *Más allá de la coincidencia*
- **Juan Carlos Arce**
  - *El matemático del rey*
- **Elinor J. Pinczes**
  - *One Hundred Hungry Ants*
- **Teri Perl**
  - *Women and Numbers*
- **McGraw Hill**
  - *Matemáticas Integradas I, II, III*
- **Raymond Barnett**
  - *Pre calculo: Funciones y graficas*
- **Glencoe**
  - *Algebra I*
- **Juan Sanchez**
  - *Algebra*

**Recursos adicionales**

- [http://education.ti.com/downloads/guidebooks/graphing/84p/TI84Plus\\_guidebook\\_ES.pdf](http://education.ti.com/downloads/guidebooks/graphing/84p/TI84Plus_guidebook_ES.pdf)
- <http://isa.umh.es/calc/TI/TI83/TI83manual-spa.pdf>



**Unidad Algebra II.4: Funciones polinómicas y racionales**  
**Matemáticas**  
**5 semanas de instrucción**

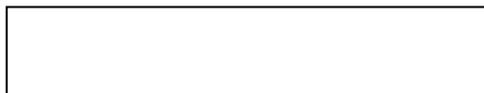
**Actividades de aprendizaje sugeridas**

*¿Racional o irracional?*

- Puede iniciar enseñando por qué la suma, diferencia y producto de los números racionales es racional y por qué la suma o producto de un racional e irracional es irracional. (Ya que cada diferencia es una suma y cada cociente es un producto, esto incluye diferencias y cocientes también.) Al explicar por qué las cuatro operaciones de números racionales producen números racionales puede ser una revisión de los estudiantes para su entendimiento de las fracciones y números negativos. Al explicar por qué la suma de un racional y un número irracional es irracional, o por que el producto es irracional, incluya el razonamiento sobre la relación inversa entre la suma y la resta (o entre multiplicación y adición).

**Ejemplos:**

- 1) Explique porque el número  $2\pi$  debe ser irracional, dado que  $\pi$  es irracional.
  - *Ejemplo de Respuesta:* Si  $2\pi$  era racional, entonces la mitad de  $2\pi$  también sería racional, entonces  $\pi$  debería ser racional también.
- 2) El rectángulo que se muestra abajo tiene un largo de 6 pies.



6 pies

- El valor del área del rectángulo, en pies cuadrados, es un número irracional. Por lo tanto, el número que representa el ancho del rectángulo debe ser —
    - A. un número entero.
    - B. un número racional.
    - C. un número irracional.
    - D. un número complejo no real.
- 3) El largo,  $\ell$ , y el ancho,  $w$ , del rectángulo mostrado abajo tiene valores que son números racionales:



w

L

- Construya una prueba informal que muestre que el valor del área, en pies cuadrados, del rectángulo debe ser un número racional.
- Ejemplo de respuesta:
  - Se da:  $\ell$  es racional;  $w$  es racional.
  - Demuestre:  $\ell \times w$  es racional.



## Unidad Álgebra II.4: Funciones polinómicas y racionales

### Matemáticas

### 5 semanas de instrucción

- Prueba: Ya que  $\ell$  es racional, por la definición de número racional,  $\ell$  puede ser escrito en la forma, donde  $a$  y  $b$  son ambos enteros y  $b$  es distinto de cero. Similarmente, ya que  $w$  es racional, por definición de números racionales,  $w$  puede escribirse en la forma, donde  $c$  y  $d$  son ambos enteros y  $d$  es distinto de cero. Ya que el conjunto de enteros está cerrado bajo la operación de multiplicación, ambos  $ac$  y  $bd$  son enteros. Así  $\ell \times w$  es la de dos enteros. por definición de número racional,  $\ell \times w$  es racional.

#### El Teorema Fundamental de Álgebra

- Haga que los estudiantes inicien la lección al encontrar los ceros (raíces) de la función  $f(x) = x^2 - 9$
- Pídales que compartan sus ceros entre si al estar en parejas. Pídales que compartan su metodología al encontrar los ceros. Seleccione una pareja aleatoriamente y ellos deberán compartir sus ceros y la metodología. Permita una discusión y críticas. Pregunte si alguna pareja tiene un método distinto. Pídales que lo compartan. Permita una discusión y críticas. Continúe hasta que la mayoría de los métodos: gráficas, tablas, factorización, completar el cuadrado y la fórmula cuadrática hayan sido discutidos. Asegúrese que el graficar y la factorización estén entre los que han sobresalido.
- 1. Pregunte a las parejas, “¿Cuál es el número de ceros (raíces) máximo y mínimo que una ecuación cuadrática puede tener?” Pídales que construyan funciones de ejemplo para ilustrar sus opciones de máximo y mínimo y los números en el medio. Aleatoriamente seleccione una pareja que proponga el máximo. Pregunte a otra pareja seleccionada si están o no de acuerdo. Si están de acuerdo, pídale que brinden un ejemplo. Si están en desacuerdo, pídale que brinden un contraejemplo. Permita una discusión y críticas de todo el grupo. Repita este procedimiento para el número de ceros mínimo. (Incluyendo los ceros imaginarios, el máximo es dos y el mínimo es uno.) (Busque evidencia de MP3, MP7.)
- 2. Pregunte, “Si tienes una función con la potencia más grande (grado) de tres, ¿cuál sería el número máximo y mínimo de ceros (raíces)?” Repita el procedimiento en la parte 1 para esta pregunta. (Incluyendo los ceros imaginarios, el máximo es tres y el mínimo es uno.) (Busque evidencia de MP3, MP7.)
- 3. Pida a las parejas que hagan conjeturas, basadas en sus observaciones de las partes 1 y 2, sobre reglas generales para el número de ceros máximo y mínimo. Permita una discusión y críticas. Usando una grabadora y un moderador, pida a la clase que escriban una versión del Teorema Fundamental de Álgebra (número concerniente de ceros y grado).
- 4. Pregunte, “¿Cuáles son los ceros (raíces) de  $f(x) = x^2 + 9$ ?” Pida a las parejas que los encuentren. Seleccione una pareja aleatoriamente para que comparta sus respuestas para los ceros y la metodología. Permita la discusión y las críticas. Pregunte si alguna pareja tiene un método distinto. Pídales que lo compartan. Permita la discusión y las críticas. (Nota: El único método de esta lección que no puede usarse exitosamente aquí es el graficar en un plano  $x$ - $y$ . Calculadoras, fórmulas, y ecuaciones pueden ser adaptados para encontrar los ceros,  $3i$  y  $-3i$ .)
- 5. Pida a las parejas que encuentren los ceros (raíces) de  $f(x) = x^2 - 6x + 13$ . Dígalos que traten con alguno de los métodos sugeridos por otra pareja en la explicación previa. Adicionalmente, pida a las parejas que verifiquen/revisionen su(s) respuesta(s). Seleccione una pareja que comparta sus respuestas y métodos de verificación. Permita la discusión y las críticas Pregunte si alguna pareja tiene un método de verificación distinto. Pídales que lo compartan. Permita la discusión y las críticas. Recalque aquellas respuestas de verificación que involucren la multiplicación de factores asociadas con ceros para encontrar la ecuación.
- 6. Asigne a cada grupo un número 1,2 o 3 aleatoriamente o haciendo que los grupos cuenten. Los grupos tendrán tareas numeradas abajo que será igual a la de su número de grupo.
  - “Una función cuadrática tiene ceros  $x=1 + 5i$ ,  $1 - 5i$ . ¿Cuál podría ser la función?” (respuesta:  $f(x) = x^2 - 2x + 26$ )
  - “Una función cuadrática tiene un solo cero  $x = 7$ . ¿Cuál podría ser la función?” (respuesta: de  $f(x) = x^2 - 14x + 49$ )
  - “Una función tiene ceros  $x=6i$ ,  $-6i$ , y  $-3$ . ¿Cuál podría ser la función?” (respuesta:  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 36x + 49$ )
- Pida a las parejas que encuentren sus respuestas y que indiquen que hace a su problema distinto y más retador que aquellos hechos hasta ahora en otras lecciones. Seleccione una pareja aleatoriamente para cada número de grupo para que compartan sus respuestas a su función y describan que hace a este problema único.

(Fuente: HCPSS Secondary Mathematics Office (v2.1); adapted from: *Leinwand, S. (2009). Accessible mathematics: 10 instructional shifts that raise student achievement. Portsmouth, NH: Heinemann.*)



## Unidad Algebra II.4: Funciones polinómicas y racionales

### Matemáticas

### 5 semanas de instrucción

#### Ejemplos para planes de la lección

##### *¿Quién soy?*

- Halla un polinomio a partir de sus raíces: En esta lección, los estudiantes escribirán la ecuación de un polinomio en forma estándar dadas sus raíces y el comportamiento final de la función. Los estudiantes determinarán los extremos locales usando una herramienta para gráficas, graficarán el polinomio usando la herramienta y papel cuadriculado y hallarán las raíces complejas de un polinomio de orden mayor en forma estándar. Realizarán también operaciones con polinomios, números radicales y complejos. Esta lección les provee a los estudiantes la oportunidad de aplicar teoremas relacionados con las raíces de los polinomios y los factores de los polinomios.
- Materiales: papel cuadriculado, papel de gráfica, calculadora gráfica y hoja de actividades (ver anejo: “AL.4 Ejemplo para plan de lección - ¿Quién soy? - Halla un polinomio a partir de sus raíces”).
- Instrucciones:
  1. Dale a cada estudiante las raíces y comportamiento final de un polinomio. Recorta las raíces y el comportamiento en tiras de papel. Estas se ordenan en orden alfabético. Los estudiantes deberán agruparse más adelante con los estudiantes que tengan el mismo polinomio (letra).
  2. Usando la calculadora gráfica, aproximan los extremos, las intercepciones en  $x$  y las intercepciones en  $y$ . Grafican el polinomio en papel cuadriculado y rotulan los extremos, intercepciones en  $x$  e intercepciones en  $y$  con un par ordenado.
  3. Los estudiantes escriben el polinomio en forma factorizada con factores lineales y respectivo a los números enteros.
  4. En papel cuadriculado, grafican los polinomios en forma estándar en  $y-1$  y el polinomio en forma factorizada en  $y-2$ . Deberán repetir los pasos dos y tres hasta que las gráficas coincidan.
  5. Aproximan los extremos usando la calculadora gráfica. Hallan las intercepciones en  $x$  y las intercepciones en  $y$ . Grafican el polinomio en papel cuadriculado y rotulan los extremos, intercepciones en  $x$  e intercepciones en  $y$  con un par ordenado.
  6. Los estudiantes colaboran para preparar un afiche con las mismas raíces y condiciones polinómicas. Deben escribir las raíces y el comportamiento final al dorso. Solo se rotulan en la parte del frente la forma estándar y los extremos. Deben incluir una escala para los ejes en  $x$  y en  $y$ .
  7. Haz observaciones inmediatas y presenta el trabajo de los estudiantes.